N désigne l'ensemble des entiers naturels, **R** le corps des réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul.

I

1° f étant une application dérivable de **R** dans **R**, f' sa dérivée, on considère les deux équations différentielles :

$$(1) \qquad f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - f'(x)\frac{dy}{dx} - [f(x)]^3 . y = 0$$

$$(2) \qquad f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - f'(x)\frac{dy}{dx} + [f(x)]^3 . y = 0,$$

où y désigne une fonction inconnue deux fois dérivable.

a. Déterminer une application φ deux fois dérivable de **R** dans **R** telle qu'un changement de variable défini par $u = \varphi(x)$ ramène les équations (1) et (2) à des équations différentielles linéaires à coefficients constants de forme très simple, pour toute valeur de x n'annulant pas $f(x)$.

b. Exprimer les solutions générales de (1) et (2) à l'aide de la fonction g telle que $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

c. Les expressions trouvées au *b.* vérifient-elles (1) ou (2) pour les valeurs de x annulant $f(x)$?

d. Dans le cas où $f(0) \neq 0$, préciser les solutions h_1 de (1) et h_2 de (2) vérifiant les conditions $h_1(0) = h_2(0) = 0$ et $h_1'(0) = h_2'(0) = 1$, h_1' et h_2' désignant les dérivées de h_1 et h_2.

2° On pose dans l'équation (1) $f(x) = \cos x$ et dans l'équation (2) $f(x) = \operatorname{ch} x$; déterminer les fonctions h_1 et h_2 correspondantes. Calculer la partie principale de l'infiniment petit $h_1(x) - h_2(x)$ pour x voisin de 0.

3° Soient C_1 et C_2 les courbes représentatives, pour un même repère orthonormé, des fonctions h_1 et h_2, déterminées au 2°; on désigne par $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ la suite croissante des zéros positifs de h_2 ($x_0 = 0$) et par $\{x'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ la suite croissante des zéros positifs de h_2'. Donner les meilleures valeurs approchées à 10^{-3} près de $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$, $h_1(x'_1)$, $h_1(x_3)$, $h_1'(x_3)$ et du maximum de h_1.

Dessiner sur un même graphique les arcs de C_1 et C_2 correspondant à $x_0 \leqslant x \leqslant x_3$; l'unité de longueur sera prise égale à 5 cm.

II

La fonction h_2 est celle qui a été définie au 2° de la première partie, la courbe C_2, celle qui a été définie au 3° de la première partie.

1° On désigne par $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ les points de C_2 de coordonnées positives à tangentes parallèles à Ox, rangés dans l'ordre croissant de leurs abscisses; soit ρ_k le rayon du cercle de courbure de C_2 en M_k ; étudier la convergence de la série de terme général ρ_k.

2° Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, C_2 admet un unique point d'inflexion dont l'abscisse t_n appartienne à l'intervalle $]x_n, x_{n+1}[$. On pose $t_n = x_n + \alpha_n$ et $\operatorname{sh} t_n = n\pi + \beta_n$. Montrer que β_n est un infiniment petit équivalent à $\frac{1}{n\pi}$ pour n infiniment grand; en déduire la convergence de la série de terme général α_n.

3° Étudier la convergence de la série de terme général $\int_{x_n}^{x_{n+1}} h_2(x)\,dx$ et celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_2(x)\,dx$. Quelle est la partie principale de $\int_{x_{2p}}^{x_{2p+2}} h_2(x)\,dx$ par rapport à $\frac{1}{p}$?

III

r désigne un nombre réel donné strictement positif.

1° Démontrer que l'application ψ_r de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, telle que $\psi_r(x) = \sin(x^r)$ est solution d'une équation du type (2); préciser la fonction f correspondante. On appelle Γ_r la courbe représentative de ψ_r pour un repère orthonormé.

2° Traiter la même question qu'au 1° de la deuxième partie, Γ_r remplaçant C_2.

3° Étudier la convergence de la série de terme général $I_n = \int_{(n\pi)^{\frac{1}{r}}}^{[(n+1)\pi]^{\frac{1}{r}}} \sin(x^r)\,dx$ et celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^r)\,dx$. Quelle est la partie principale de $I_{2p} + I_{2p+1}$ par rapport à $\frac{1}{p}$?

4° *a.* On suppose $r > 1$. Montrer que, pour tout n entier naturel, Γ_r admet un unique point d'inflexion dont l'abscisse τ_n vérifie :

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \tau_n^r < n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

On pose $\tau_n = (n\pi)^{\frac{1}{r}} + \gamma_n$. Étudier la convergence de la série de terme général γ_n.

b. Que peut-on dire du cas où $0 < r < 1$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail